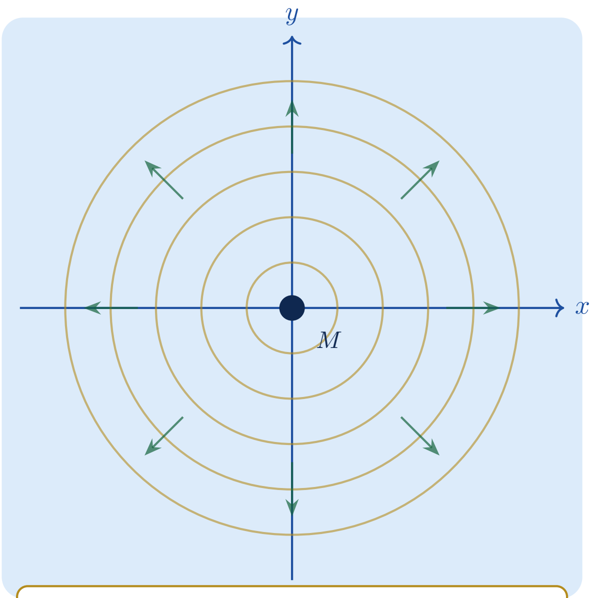
Pierre-Simon de Laplace
és az egyenlete

A gravitációtól az univerzális harmonikus függvényekig



$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Jelek és Rendszerek tananyag

Kiegészítő tudománytörténeti és matematikai háttéranyag

Contents

1 Bevezetés – Ki volt Laplace?

A „francia Newton” Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) a francia felvilágosodás egyik legjelentősebb matematikusa és fizikusa volt. Normandiai parasztcsaládból származott, de tehetsége gyorsan a Párizsi Tudományos Akadémiáig vitte. Munkássága átíveli a valószínűségszámítást, az égi mechanikai, a potenciálelméletet és a matematikai fizikát.

Pierre-Simon de Laplace nem egyetlen „heuréka-pillanat” alatt kiáltott fel, hanem a 18. század végén a matematikai fizika és a csillagászat problémáinak megoldása közben jutott el a róla elnevezett egyenlethez. A felfedezés útja leginkább a **gravitáció** és a **bolygómozgások** tanulmányozásán keresztül vezetett.

2 A gravitáció és a potenciál elmélete

A 1700-as évek végén a fizikusokat az foglalkoztatta, hogyan lehet kiszámítani egy kiterjedt test (például a Föld vagy a Nap) **gravitációs vonzását** egy külső pontban. Newton törvényei alapján ez bonyolult integrálást igényelt minden egyes pontra.

2.1 A skalárfüggvény bevezetése

Laplace rájött, hogy ahelyett, hogy a gravitációs erőt – ami egy **irányított vektormennyiség** – közvetlenül számolná ki, érdemesebb egy **skalárfüggvénnyel** dolgozni, amit ma *gravitációs potenciálnak* nevezünk.

Gravitációs potenciál

Egy M tömegű pontszerű test gravitációs potenciálja az $\mathbf{r}$ helyen:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

ahol G a gravitációs állandó, $\mathbf{r}_0$ a tömeg helye. Az erő a potenciál **gradiense**:

$$\mathbf{F} = -m\,\nabla V$$

Ez a lépés kulcsfontosságú volt: ahelyett, hogy három külön erőkomponenst (F_x, F_y, F_z) kellene integrálni, egyetlen skalár függvénnyel (V) mindent le lehet írni, és az erő egyszerű deriválással kapható.

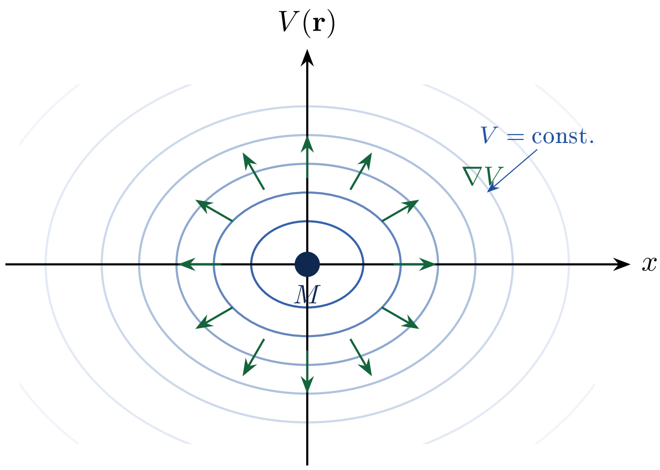


Figure 1: A gravitációs potenciál ekviopotenciális vonalai ($V = \text{const.}$) és a gradiens irányai (∇V, zöld nyilak).

2.2 Az ellentmondásmentesség keresése

Laplace azt vizsgálta, hogyan viselkedik ez a potenciálfüggvény (V) az **üres térben**, ahol nincs jelen tömeg. 1782 körül – majd részletesebben az 1785-ös munkáiban – levezette, hogy ha egy pont a vonzó tömegeken **kívül** helyezkedik el, akkor a potenciálfüggvény parciális deriváltjainak összege **nullát** ad.

3 A Laplace-egyenlet

A Laplace-egyenlet

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0} \tag{1}$$

ahol ∇^2 a **Laplace-operátor** (más néven „nabla-négyzet” vagy „delta”).

A Laplace-operátor más koordináta-rendszerekben

Gömbkoordinatákban (r, θ, φ):

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Hengerkoordinatákban (ρ, φ, z):

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

3.1 Fizikai jelentés: „A természet kivasalja a hülönbségeket”

A Laplace-egyenlet azt mondja ki, hogy a tömegmentes térben a potenciál **minden pontban a környezete átlaga**. Nincs „csúcs” és nincs „völgy” – a függvény **simul** a peremfeltételekhez.

Tétel 3.1 (Átlagérték-tétel)**.** Ha V harmonikus függvény (azaz $\nabla^2 V = 0$), akkor V értéke bármely pontban **megegyezik** a köré írt gömb felületén vett átlagértékkel:

$$V(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|=R} V(\mathbf{r})\, dS$$

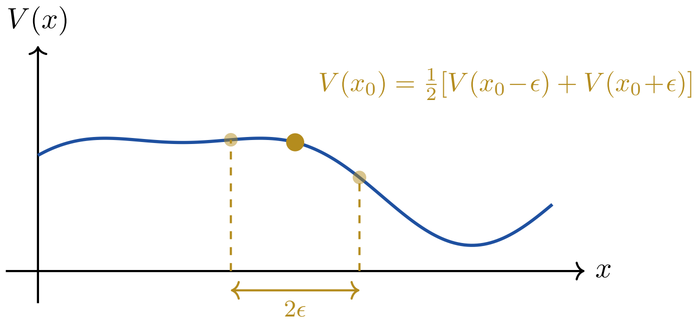


Figure 2: Az átlagérték-tulajdonság 1D-ben: minden pont értéke a szomszédainak átlaga.

4 Miért volt forradalmi?

Laplace felfedezése azért volt zsenialis, mert **egyetlen elegáns egyenlettel** írta le a mező szerkezetét.

4.1 Univerzalitás

Hamar kiderült, hogy az egyenlet nemcsak a gravitációra igaz. Ugyanezek az összefüggések írják le:

- **Statikus elektromosság** – az elektromos potenciál töltésmentes térben
- **Mágnesesség** – a mágneses skalárpotenciál árammentes tartományban
- **Hővezetés** – az állandósult hőmérsékleti mező (forrás nélkül)
- **Folyadekáramlás** – a súrlódásmentes, örvénymentes áramlás sebesség-potenciálja
- **Gravitáció** – az eredeti alkalmazás (bolygómozgás)

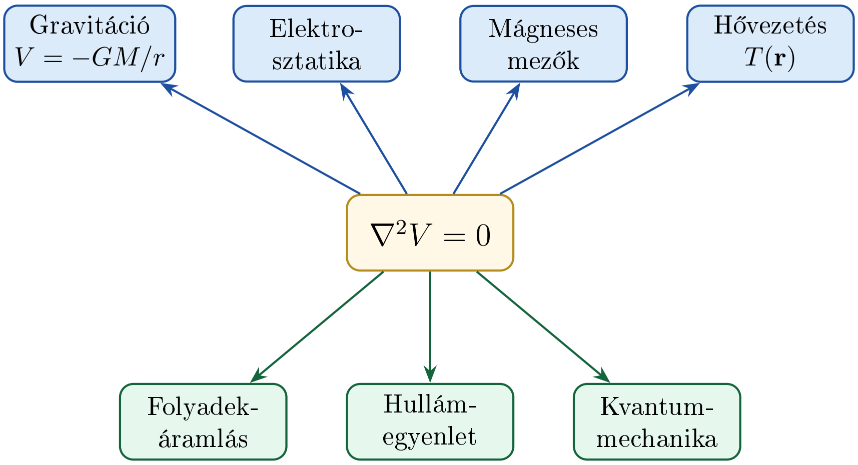


Figure 3: A Laplace-egyenlet univerzális jellege: egyetlen matematikai struktúra, számtalan fizikai alkalmazás.

4.2 Harmonikus függvények

Definíció 4.1 (Harmonikus függvény)**.** Azokat a kétszer folytonosan differenciálható $V : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $\nabla^2 V = 0$ teljesül az Ω tartományon, **harmonikus függvényeknek** nevezzük.

Laplace megmutatta, hogy ezek a természet „**legsimább**”, legegyenletesebb eloszlásait képviselik. Néhány fontos tulajdonság:

1. **Maximum-elv:** Harmonikus függvény a tartomány belsejében nem veszi fel szélsőértékét – a maximum és minimum a **peremre** esik.
2. **Analítikus:** Harmonikus függvények végtelenül sokszor differenciálhatók és Taylor-sorba fejthetők.
3. **Egyedi:** Ha a peremfeltételeket rögzítjük (Dirichlet-feladat), a megoldás **egyértelmű**.
4. **Átlagérték:** Minden pont a gömbfelületi szomszédainak átlaga ($\to$ nincs lokális extrémum).

5 A Poisson-egyenlet: általánosítás

Ha a térben **tömeg is jelen van** (sűrűsége ρ), a Laplace-egyenlet általánosítását kapjuk:

Poisson-egyenlet

$$\nabla^2 V = -4\pi G\,\rho(\mathbf{r}) \tag{2}$$

ahol $\rho(\mathbf{r})$ a tömegsűrűség. Ha $\rho = 0$ (tömegmentes tér), visszakapjuk a Laplace-egyenletet.

Az elektrosztatikában a megfelelő alak:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

ahol ρ_e a töltéssűrűség és ε_0 a vákuumpermittivitás.

6 Kapcsolódás a Fourier- és Laplace-transzformációhoz

A Laplace-*egyenlet* ($\nabla^2 V = 0$) és a Laplace-*transzformáció* ($\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$) közvetlenül összefüggenek:

A Laplace-transzformáció eredete

Laplace a potenciálegyenlet megoldásakor fejlesztette ki az integrál-transzformációs módszert. Az ötlet: egy parciális differenciálegyenletet **algebrai egyenletté** alakítani a frekvenciatartományban.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt = F(s)$$

Ez a módszer később a **jelfeldolgozás** és a **szabályozástechnika** alapjává vált.

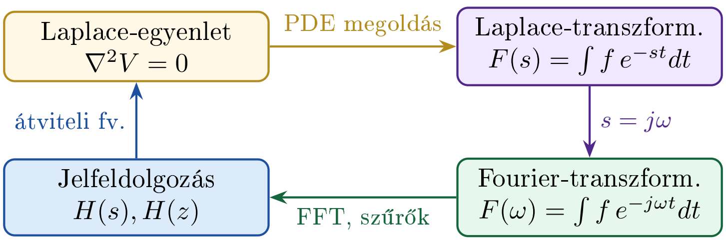
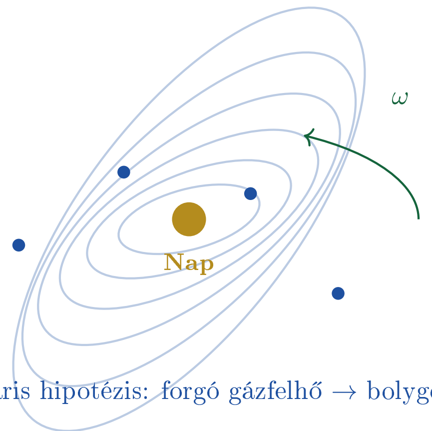


Figure 4: A Laplace-egyenlet, a Laplace-transzformáció, a Fourier-analízis és a jelfeldolgozás körös kapcsolata.

7 A Nebuláris hipotézis

A Naprendszer születése Laplace nem csak az absztrakt matek embere volt. Miközben ezeket az egyenleteket csiszolta, ő dolgozta ki a **Naprendszer kialakulásának elméletét** is – a *nebuláris hipotézist*: a bolygók egy forgó gázfelhőből álltak össze.
Az egyenletei segítettek neki **bebizonyítani**, hogy a Naprendszer **stabil marad**, és nem fog „széthullani" a bolygók egymásra gyakorolt zavaró hatásai miatt. Ez volt a híres *Mécanique Céleste* (Égi mechanika) című ötkötetes művének fő eredménye – a korszak „fizikai Bibliája".



Nebuláris hipotézis: forgó gázfelhő → bolygók

8 Példák és feladatok

Példa 8.1 (Ellenőrizzük, hogy $V = 1/r$ harmonikus)**.** Legyen $V(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r}$, ahol $r \neq 0$. Számítsuk ki $\nabla^2 V$-t:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \tag{3}$$

$$\nabla^2 V = \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial^2 V}{\partial i^2} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = \boxed{0} \quad \checkmark \tag{4}$$

Tehát $1/r$ valóban harmonikus függvény az origón kívül.

Példa 8.2 (2D Laplace-egyenlet: hőmérséklet-eloszlás)**.** Egy négyzetes lemez peremén ismert a hőmérséklet. Az állandósult állapot:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Megoldás szepárációval: $T(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$, ami Fourier-sorok szuperpozíciójára vezet – közvetlen kapcsolat a jelfeldolgozással!

9 Összefoglalás

Összefoglaló idővonal	**1687**	Newton: Principia Mathematica (gravitációs törvény)
	1782	Laplace: első forma a potenciálegyenletről
	1785	Laplace: $\nabla^2 V = 0$ teljes kidolgozása
	1799–1825	*Mécanique Céleste* öt kötete
	1807	Fourier: hővezetési egyenlet és Fourier-sor
	1812	Laplace: *Théorie analytique des probabilités*
	1813	Poisson: $\nabla^2 V = -4\pi G\rho$ általánosítás
	1822	Fourier: *Théorie analytique de la chaleur*

A Laplace-egyenlet a fizika és a mérnöki tudományok egyik legfontosabb egyenlete. Egyetlen elegáns formula, ami összeköti a gravitációt, az elektromosságot, a hőtant, a folyadekmechanikát – és a jelfeldolgozás Laplace-transzformációjának gyökereit is.

„A természet legnagyobb könyve matematikai nyelven íródott."
– Galileo Galilei (de Laplace bizonyította be)
