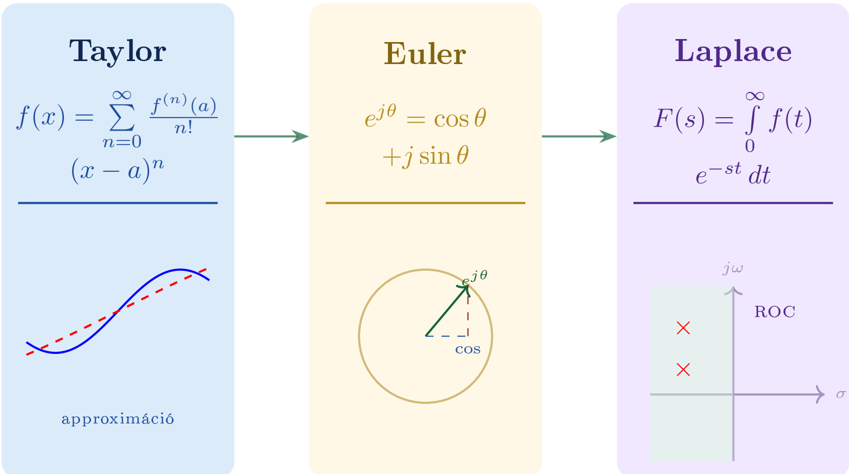
# Taylor-sor
# Euler-formula
# Laplace-transzformáció

*Három pillér, amely összeköti*
*a matematikai analízist a jelfeldolgozással*




Jelek és Rendszerek tananyag

A Taylor-sortól az Euler-formulán át a Laplace-transzformációig

# Contents



# 1 Taylor-sor – A függvények "DNS-e"

## 1.1 Motiváció: miért jó a hatványsor?

A mérnöki gyakorlatban gyakran találkozunk bonyolult függvényekkel (sin, cos, $e^x$, ln stb.), amelyeket közvetlenül nem tudunk kiszámítani. A Taylor-sor gondolata: **minden "jól viselkedő" függvény leírható polinomok végtelen összegeként**, és a polinomokat könnyű kiszámolni (csak összeadás, szorzás, hatványozás kell).

## 1.2 A Taylor-sor definíciója

**Taylor-sor**

Ha $f(x)$ végtelenszer differenciálható az $a$ pont környezetében, akkor:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots} \tag{1}$$

**Speciális eset: Maclaurin-sor (a**

Ha $a = 0$-ban fejtjük sorba, **Maclaurin-sorról** beszélünk:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots$$

## 1.3 Geometriai jelentés: egyre jobb közelítés

Minden egyes tag hozzáadása "javítja" a közelítést:

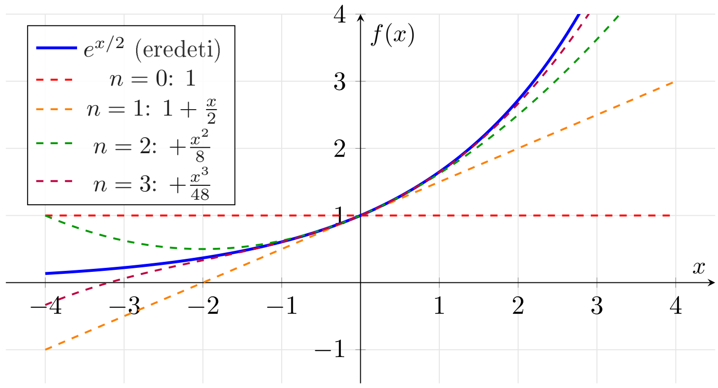



Figure 1: Az $e^{x/2}$ függvény Taylor-közelítése $a = 0$ körül, $n = 0, 1, 2, 3$ taggal.

## 1.4 A legfontosabb Maclaurin-sorok

**Alapvető sorok – ezeket érdemes megjegyezni!**

**Exponenciális:**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (\text{konvergencia: } \forall\, x \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

**Szinusz:**

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{3}$$

**Koszinusz:**

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{4}$$

**Geometriai sor:**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (\text{konvergencia: } |x| < 1) \tag{5}$$

**Természetes logaritmus:**

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (|x| \le 1,\ x \ne -1) \tag{6}$$

Nem minden $x$-re konvergál a sor! A **konvergenciasugár** ($R$) megadja, mekkora tartományban érvényes a kifejtés. Például: $e^x$: $R = \infty$; $\sin x$, $\cos x$: $R = \infty$; $1/(1-x)$: $R = 1$; $\ln(1+x)$: $R = 1$.

## 1.5 Miért fontos a mérnöknek?

1. **Linearizálás:** Nemlineáris rendszereknl az első két tag ($f(a) + f'(a)(x - a)$) adja a **lineáris közelítést** a munkpont körül.
2. **Numerikus számítás:** A processzorok így számolják ki a sin, cos, $e^x$ függvényeket (CORDIC vagy polinom-közelítés).
3. **Ez vezet az Euler-formulához** – lásd a következő fejezetet!

Ha $x$ kicsi (radiánban), a Taylor-sorból $\sin(x) \approx x - x^3/6$, és $x \ll 1$ esetén már $\sin(x) \approx x$ is jó közelítés. Például: $\sin(0.1) = 0.09983\ldots \approx 0.1$ (hiba $< 0.2\%$).
A mérnöki alkalmazásokban ezt a "kis szög közelítést" gyakran használjuk szabályozástechnikában, inga-feladatokban és optikában.

# 2 Az Euler-formula – A matematika "legszebb" egyenlete

## 2.1 A formula levezetése Taylor-sorból

Most jön a varázslat! Helyettesítsünk $x = j\theta$-t ($j = \sqrt{-1}$) az exponenciális sorba:

Levezetés Taylor-sorból Kiindulás az (2) sorból, $x \to j\theta$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= 1 + (j\theta) + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \frac{(j\theta)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + j\theta + \frac{j^2\theta^2}{2!} + \frac{j^3\theta^3}{3!} + \frac{j^4\theta^4}{4!} + \frac{j^5\theta^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

Használjuk, hogy $j^2 = -1, \quad j^3 = -j, \quad j^4 = +1, \quad j^5 = +j, \ldots$

$$= \underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots}_{\cos\theta} + j\underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)}_{\sin\theta}$$

És így kapjuk:

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta} \tag{7}$$

**Az Euler-formula és következményei**

**Alap:** $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
**Konjugált:** $e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$
**Koszinusz:** $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$
**Szinusz:** $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$
**Euler-identitás** ($\theta = \pi$): $\boxed{e^{j\pi} + 1 = 0}$
*Ez az egyenlet öt alapvető konstanst köt össze:* $e$, $j$, $\pi$, 1, 0.

## 2.2 Geometriai jelentés: forgás a komplex síkon

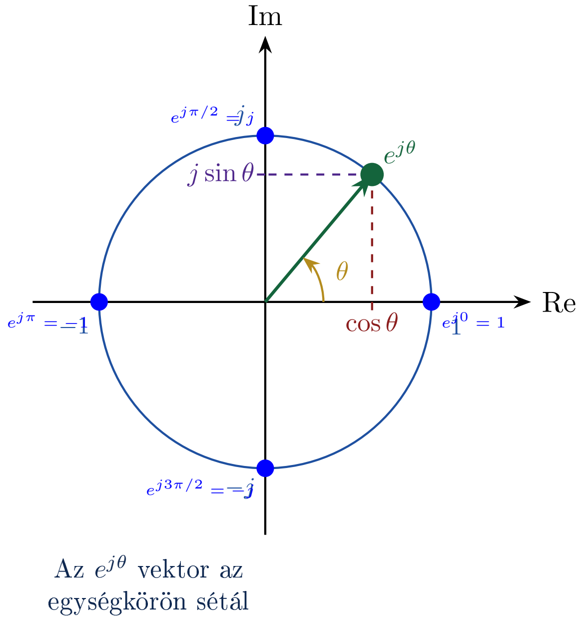



Figure 2: Az Euler-formula geometriai értelmezése: $e^{j\theta}$ egy egységvektor, amelynek valós vetülete $\cos\theta$, képzetes vetülete $\sin\theta$.

Miért pont $e$? Az $e^{j\theta}$ azért pont az $e$ számot használja, mert az exponenciális függvény **saját deriváltja**: $(e^x)' = e^x$. Ez teszi lehetővé, hogy a differenciálegyenletek megoldásaiban az $e^{st}$ "sajátfüggvény" legyen – ami a Laplace-transzformáció alapja.

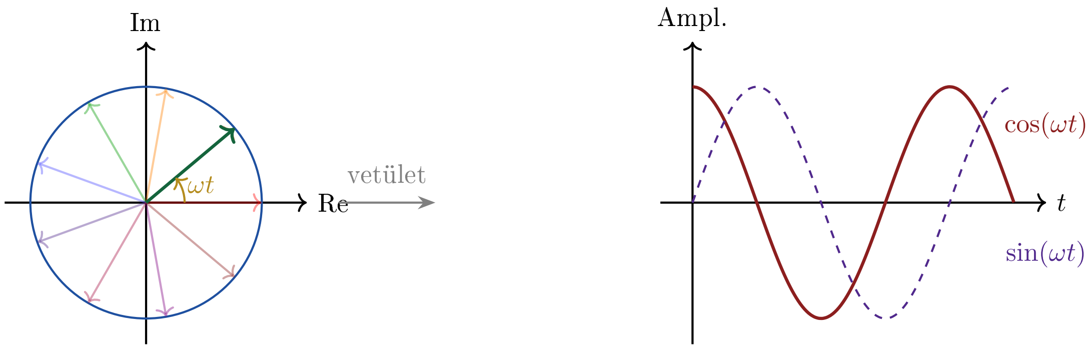
## 2.3 Az $e^{j\omega t}$ időfüggő forgás

Ha az $e^{j\theta}$ képletben $\theta = \omega t$-t írunk (ahol $\omega$ a körfrekvencia, $t$ az idő):

**Időfüggő komplex exponenciális**

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \tag{8}$$

Ez egy egységnyi sugarú körön $\omega$ szögsebességgel forgó vektor. Egyetlen pörgés ideje: $T = 2\pi/\omega$.




Komplex sík Időtartomány

Figure 3: A forgó vektor valós vetülete a koszinusz, képzetes vetülete a szinusz.

### 2.4 Fontos azonosságok

**Az Euler-formula alkalmazásai**

**Trigonometrikus azonosságok** könnyen levezethetők:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = |e^{j\theta}|^2 = 1 \qquad \checkmark$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \mathrm{Re}\{e^{j\alpha}\cdot e^{j\beta}\} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

**Polárforma:** $z = r\,e^{j\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$, ahol $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$.
**Szorzás:** $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\, e^{j(\theta_1+\theta_2)}$ (sugarát szorozzuk, szögeket összeadjuk).
**Hatványozás (de Moivre):** $(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}$, azaz $(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$.

# 3 A Laplace-transzformáció – Időből a frekvenciába

## 3.1 Motiváció: miért kell?

A mérnöki gyakorlatban differenciálegyenletekkel írjuk le a rendszereket (RC kör, rugó–tömeg, szabályozók stb.). A Laplace-transzformáció **algebrává alakítja** ezeket:

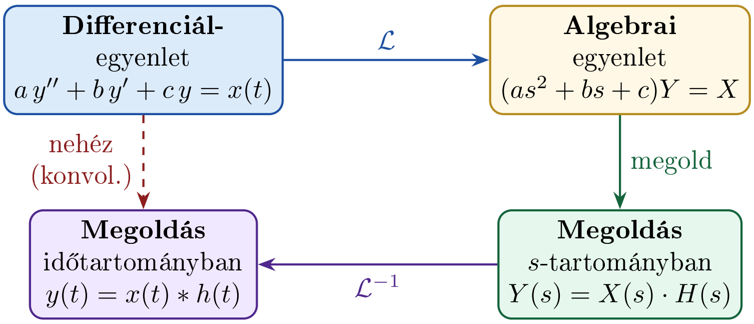



Figure 4: A Laplace-transzformáció "kerülőútja": a nehéz konvolúció helyett algebrai műveleteket végzünk.

## 3.2 Definíció

**A Laplace-transzformáció**

**Egyoldali (kauzális jelek):**

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt} \tag{9}$$

ahol $s = \sigma + j\omega$ **komplex változó**.
**Kétoldali:**

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \tag{10}$$

Az $e^{-st} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}$ két részből áll:

- $e^{-j\omega t}$: a **Fourier-mag** – frekvenciára bontja a jelet (lásd Euler!)
- $e^{-\sigma t}$: a **csillapító tényező** – biztosítja, hogy az integrál konvergáljon

Ha $\sigma = 0$, akkor $s = j\omega$ és visszakapjuk a **Fourier-transzformációt**!

## 3.3 Az $s$-sík és a konvergenciatartomány (ROC)

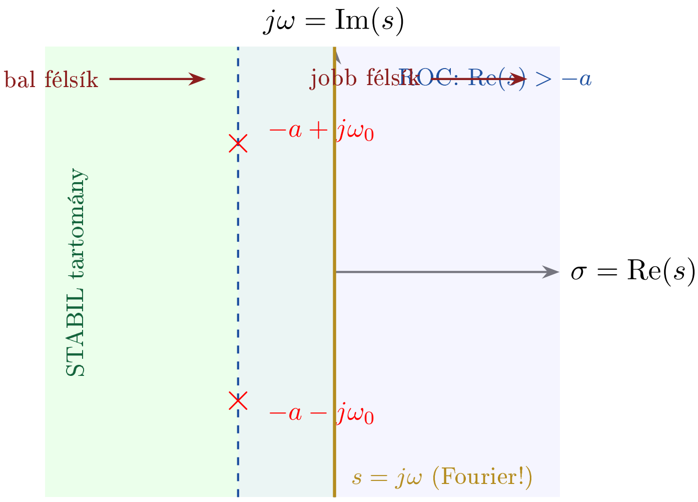



Figure 5: Az $s$-sík: a bal félsík a stabil tartomány, a $j\omega$ tengely a Fourier-tartomány, a pólusok ($\times$) határozzák meg a rendszer viselkedését.

## 3.4 Kapcsolat a Taylor-sorral és Eulerrel

**A három pillér összekapcsolása**

A Laplace-transzformáció mag-függvénye:

$$e^{-st} = e^{-(\sigma+j\omega)t} = \underbrace{e^{-\sigma t}}_{\text{csillapítás}} \cdot \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\text{forgás (Euler!)}}$$

A forgás-rész az Euler-formulából:

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

És az $e^{-\sigma t}$ Taylor-sora:

$$e^{-\sigma t} = 1 - \sigma t + \frac{(\sigma t)^2}{2!} - \frac{(\sigma t)^3}{3!} + \cdots$$

**Tehát:** Taylor $\to$ Euler $\to$ Laplace: a három pillér egyetlen láncolatot alkot!

## 3.5 A legfontosabb Laplace-párok

**Laplace-párok táblázata**

| $f(t), \quad t \geq 0$ | $F(s)$ | **ROC** |
|---|---|---|
| $\delta(t)$ | 1 | egész $s$-sík |
| $u(t)$ (egységugrás) | $\frac{1}{s}$ | $\mathrm{Re}(s) > 0$ |
| $t\,u(t)$ (rámpa) | $\frac{1}{s^2}$ | $\mathrm{Re}(s) > 0$ |
| $t^n u(t)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $\mathrm{Re}(s) > 0$ |
| $e^{-at}u(t)$ | $\frac{1}{s+a}$ | $\mathrm{Re}(s) > -a$ |
| $t\,e^{-at}u(t)$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $\mathrm{Re}(s) > -a$ |
| $\cos(\omega_0 t)\,u(t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$ | $\mathrm{Re}(s) > 0$ |
| $\sin(\omega_0 t)\,u(t)$ | $\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ | $\mathrm{Re}(s) > 0$ |
| $e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$ | $\mathrm{Re}(s) > -a$ |
| $e^{-at}\sin(\omega_0 t)\,u(t)$ | $\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$ | $\mathrm{Re}(s) > -a$ |

## 3.6 A legfontosabb Laplace-tételek

**Műveleti tételek**

| **Időtartomány** | **$s$-tartomány** |
|---|---|
| Linearitás: $\alpha f + \beta g$ | $\alpha F(s) + \beta G(s)$ |
| Deriválás: $f'(t)$ | $sF(s) - f(0^-)$ |
| Második derivált: $f''(t)$ | $s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$ |
| Integrálás: $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ | $\frac{F(s)}{s}$ |
| Késleltetés: $f(t-t_0)\,u(t-t_0)$ | $e^{-st_0}F(s)$ |
| Frekvenciatolás: $e^{-at}f(t)$ | $F(s+a)$ |
| Konvolúció: $f(t) * g(t)$ | $F(s) \cdot G(s)$ |
| Végérték-tétel: $\lim_{t\to\infty} f(t)$ | $\lim_{s\to 0} sF(s)$ |
| Kezdetiérték: $f(0^+)$ | $\lim_{s\to\infty} sF(s)$ |

# 4 A három pillér összefonódása

## 4.1 A nagy kép

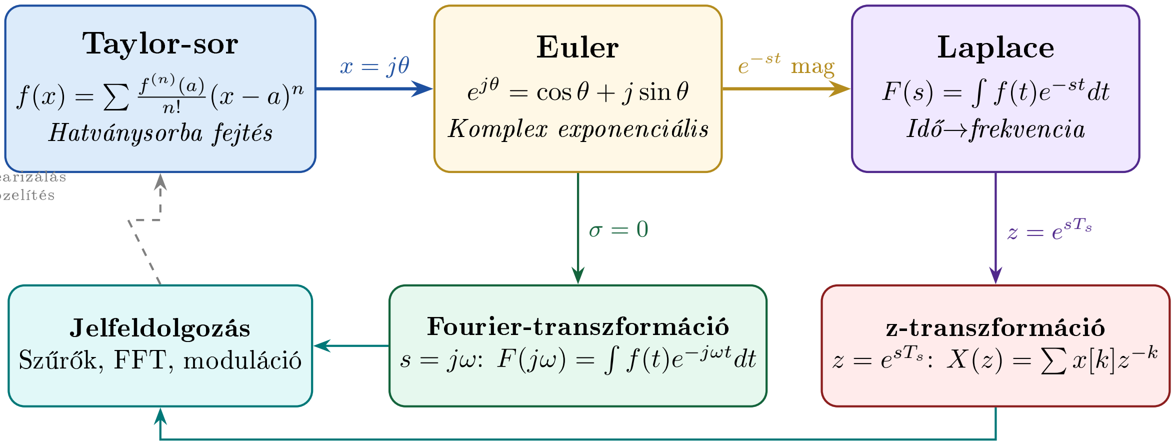



Figure 6: A Taylor-sor, az Euler-formula és a Laplace-transzformáció összefüggései és további alkalmazásai.

## 4.2 Lépésről lépésre

1. **Taylor megadja a nyelvet:** A függvények hatványsorral írhatók le. Az $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ sorai végtelenül konvergálnak.
2. **Euler összeköti a valósat a komplex-szal:** A Taylor-sor $x = j\theta$ behelyettesítésével $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ – a komplex exponenciális **forgás** a komplex síkon.
3. **Laplace alkalmazza a mérnöki problémákra:** Az $e^{-st} = e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}$ mag felhasználja az Euler-forgást ($e^{-j\omega t}$) és hozzáad egy csillapító tényezőt ($e^{-\sigma t}$), így a differenciálegyenletek algebrává válnak.
4. **Fourier a speciális eset:** Ha $\sigma = 0$ (nincs csillapítás), a Laplace-ból a Fourier-transzformációt kapjuk: $F(j\omega) = \int f(t)e^{-j\omega t}dt$.
5. **z-transzformáció a digitális párja:** $z = e^{sT_s}$ leképezéssel a folytonos Laplace-tér a diszkrét $z$-síkra kerül.

# 5 Részletes példák

Kifejtjük az $e^{-st}$-t Taylor-sorba ($s$ körül):

$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

Feltétel: $\text{Re}(s+a) > 0$, azaz $\text{Re}(s) > -a$ (ez a ROC).

Euler alapján: $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$. Ezért:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\,u(t)\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t}u(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-j\omega_0 t}u(t)\} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+j\omega_0} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(s+j\omega_0)+(s-j\omega_0)}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Egy RC aluláteresztő szűrő differenciálegyenlete:

$$RC\,\frac{dy}{dt} + y(t) = x(t)$$

Laplace-transzformáció (nulla kezdeti feltételekkel):

$$RC \cdot sY(s) + Y(s) = X(s) \quad \Longrightarrow \quad Y(s)(RCs+1) = X(s)$$

Az átviteli függvény:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1/RC}{s+1/RC} = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

ahol $\omega_c = 1/(RC)$ a vágási frekvencia. **Ez a klasszikus elsőrendű LP szűrő!**

A pólus helye: $s = -1/RC = -\omega_c$ (bal félsík → stabil).

A csillapított harmonikus oszcillátor: $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = x(t)$. Laplace-ban:

$$(ms^2 + cs + k)Y(s) = X(s) \quad \Longrightarrow \quad H(s) = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ahol $\omega_n = \sqrt{k/m}$ a természetes frekvencia, $\zeta = c/(2\sqrt{mk})$ a csillapítási tényező.

**Pólusok:** $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

- $\zeta > 1$: két valós pólus (túlcsillapított)
- $\zeta = 1$: kettős valós pólus (kritikus csillapítás)
- $0 < \zeta < 1$: komplex konjugált póluspár (alulcsillapított, rezgő)
- $\zeta = 0$: tisztán képzetes pólusok (csillapítatlan rezgés)

# 6 Összefoglalás

| | **Taylor-sor** | **Euler-formula** | **Laplace-trafo** |
|---|---|---|---|
| **Lényeg** | Függvény → polinom | Exponenciális → trig. | DiffEgy → algebra |
| **Képlet** | $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ | $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ | $F(s) = \int f\, e^{-st}dt$ |
| **Mit csinál?** | Közelít, fejt | Forgást ír le | Időből frekvenciába visz |
| **Mérnöki haszn.** | Linearizálás, num. szám. | I/Q jelek, moduláció | Átviteli fv., stabilitás |
| **Speciális eset** | Maclaurin ($a = 0$) | Euler-id. ($e^{j\pi} + 1 = 0$) | Fourier ($\sigma = 0$) |
| **Kapcsolódás** | → Euler levezetése | → Laplace mag-fv. | → z-trafo ($z = e^{sT}$) |

A jelfeldolgozás "aranyháromszöge" A Taylor-sor, az Euler-formula és a Laplace-transzformáció együtt alkotják azt a matematikai fundamentumot, amelyre az egész modern jelfeldolgozás épül.

- A **Taylor-sor** biztosítja, hogy a bonyolult függvényeket egyszerű tagokra bonthassuk.
- Az **Euler-formula** összeköti az exponenciális és a trigonometrikus függvényeket, megteremtve a komplex jelreprezentációt.
- A **Laplace-transzformáció** (és Fourier-változata) alkalmazza mindezt a valós mérnöki problémákra: szűrők, szabályozás, stabilitásvizsgálat.

*Aki érti ezt a háromszöget, az érti a jelfeldolgozás nyelvét.*